Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

1 Cercle unité et exponentielle complexe (Arnaudiès-Fraysse et Perrin)

1.1 Généralités et exponetielle

- Définition de $\mathbb{U}$
- Définition de l'exponentielle complexe + lien avec $\mathbb{U}$ (notamment $x \mapsto e^{ix}$ surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$)
- Définition de sinus et cosinus avec l'exponentielle complexe
- Formule de Moivre/Euler
- Exemples applications : linéarisation $\cos^n(x)$ ou série géométrique
- Polynôme de Tchébychev
- $\cos^2 + \sin^2 = 1$ + dessin en annexes
- Un théorème d'isomorphisme entre $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^* \times \mathbb{U}$

1.2 Racines n-èmes de l'unité

- Définitions + racines primitives
- Seul sous-groupe de cardinal n de $\mathbb{C}^*$ est $\mathbb{U}_n$
- $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{U}_d^*$
- Application : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

2 Polynômes cyclotomiques Perrin

2.1 Généralités

- Définitions + Exemple des premiers
- Propriétés utiles pour les dévs
- Dév 1 : Les ϕ_n sont à coeffs entiers

2.2 Applications

- Dév 1 : Dirichlet faible
- Wederburn
- Si ζ une racine n-ème primitive de l'unité, $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$
- Dév 2 : Gauss-Wantzel

3 Applications en algèbre

- Théorème de Kronecker (Perrin)
- Déterminant circulant(Gourdon)

Remarques :

- Il y a clairement moyen de rallonger ce plan (avec la théorie des représentations par exemple)
- Ça a l'air court mais ça fait déjà long si on développe tout